تهیه و تنظیم از آقایان: هوشنگ شرقی، بهمن اصلاح پذیر

ریاضی ۱:

۱-(الف) برای دو مجموعه A و B ثابت کنید هرگاه $A\cap B = A\cup B$ آنگاه $A=B$

ب) ثابت کنید هرگاه برای مجموعه‌های $A_1, A_2, \cdots, A_n$ داشته باشیم:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

آنگاه: $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$

۲- ثابت کنید مجموع و حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی است گویا. (نتیجه: مجموعه اعداد گویا نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است)

۳- نشان دهید مجموعه اعداد گنگ نسبت به هیچ یک از اعمال جمع و ضرب بسته نیست.

۴- عدد صحیح x را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\frac{2^{x+3}}{4^{2x+5}} = \frac{8^{-x-1}}{16^{3x+7}}$$

۵- عددهای حقیقی x ، y و z را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$(x-y^2)^4 + (2y-z)^6 + (z+y-3)^8 = 0$$

ریاضی ۲:

۱- معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt[3]{x-6} + \sqrt{x-2} = 2$$

۲- از معادله حرفی زیر x را برحسب a و b به دست آورید:

$$\frac{x^2+1}{2x} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \qquad a,b>0, |a| \neq |b|$$

۳- حدود m را طوری به دست آورید که به ازای همه مقادیر x داشته باشیم:

$$(m^2+m-2)x^2 + 2(m^2+m+1)x + (m^2+m-1) < 0$$

۴- تابع f با ضابطه $f(x) = a^x + a^{-x} (a>0)$ مفروض است. ثابت کنید:

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x).f(y)$$

سپس از آنجا نتیجه بگیرید:

$$[f(x)]^2 - f(2x) = 2$$

۵- m را طوری به دست آورید که نقطه (۲ و ۱) مرکز تقارن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + mx^2 + n$ باشد.

جبر و احتمال

۱- به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی و مثبت باشند و $a>b$ ، آنگاه:

الف) $a^2 > b^2$ ب) $a^3 > b^3$

۲- به کمک استدلال بازگشتی ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b داریم:

$$2(a^9 + b^9) \geq (a^4 + b^4)(a^5 + b^5)$$

۳- به کمک ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ... و ۹ (و هر کدام فقط یک بار) تعدادی عدد طبیعی می‌سازیم (مثلاً عددهای ۱۰۹و ۲۴ و ۵ و ۳۷ و ... و ۶۸) ثابت کنید مجموع این عددها هرگز نمی‌تواند مساوی ۳۰۰ باشد.

۴- حکم کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید:

برای هر دو ماتریس ۲×۲ A و B اگر $AB=\overline{O}$ آنگاه $A=\overline{O}$ یا $B=\overline{O}$

۵- به کمک قضیه استقرای ریاضی ثابت کنید:

الف) $n\geq ۲: \frac{۴^n}{n+۱}<\frac{(۲n)!}{(n!)^۲}$

ب) $۱۱^{n+۲}+۱۲^{۲n+۱}=۱۳۳r \quad (r\in Z)$

۶- در مستطیلی به اضلاع ۳ و ۴ سانتی‌متر شش نقطه وجود دارد. ثابت کنید دو نقطه پیدا می‌شوند که فاصله آن‌ها از یکدیگر از $\sqrt{۵}$ سانتی‌متر تجاوز نمی‌کند.

حسابان

۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^{[x]}+(-۱)^{[x]}$ را با شرط $x\in[۰,۳)$ رسم کنید.

۲- هرگاه $D_f=[۱,۲]$ باشد، دامنه توابع $f\left(\frac{[x]}{x}\right), f([x])$ را به دست آورید.

۳- در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{mx+۱}{x+m}$ ، m را طوری بیابید که:

الف) f تابعی فرد باشد.

ب) f تابعی زوج باشد. $(x\neq\pm m)$

۴- تابع چند جمله‌ای درجه سومی بنویسید که باقیمانده تقسیم آن بر $x^۲+x+۱$ مساوی $x+۲$ بوده و بر $x-۱$ بخش‌پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $x+۱$ مساوی ۴ باشد.

۵- حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\left(\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\right)^۷+\left(\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\right)^۷$$

هندسه ۱

۱- ثابت کنید مجموع زوایای خارجی یک n ضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

۲- در مثلث ABC زاویه A برابر ۱۲۰° است. نیمسازهای AD و BE و CF را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مثلث EDF در رأس D قائمه است.

۳- هرگاه به یک n ضلعی محدب یک ضلع اضافه کنیم، به تعداد قطرهای آن چقدر افزوده می‌شود؟

۴- در مثلث ABC از نقطه M وسط ضلع BC خطی موازی نیمساز درونی زاویه A رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه P و امتداد ضلع AB در نقطه Q قطع کند ثابت کنید: $BQ=CP$

هندسه ۲

۱- ثابت کنید قرینه‌های سه میانه مثلث نسبت به نیمسازهای آن در یک نقطه همرسند.

۲- خط $B'C'$ که موازی با ضلع BC از مثلث ABC است، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط B' و C' قطع می‌کند. ثابت کنید خطوط $B'C$ و BC' روی میانه AM یکدیگر را قطع می‌کنند.

۳- روی اضلاع AB و AC از مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ دو مربع $ABDE$ و $ACFG$ را می‌سازیم، ثابت کنید CD و BF روی ارتفاع رأس A یکدیگر را قطع می‌کنند.

۴- در مثلث ABC زاویه $B=۳۰^\circ$ و زاویه $C=۱۵^\circ$ ثابت کنید میانه AM با ضلع BC زاویه ۴۵° می‌سازد.

۵- در چهار ضلعی محدب $ABCD$ ثابت کنید مجموع حاصل‌ضرب‌های اضلاع مقابل از حاصل‌ضرب دو قطر بزرگ‌تر یا با آن مساوی است.

(حل مسائل، در شماره آینده می‌آید)