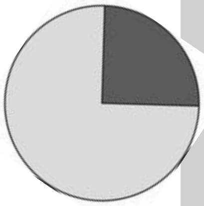
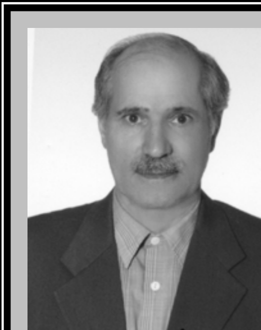
آمار و احتمال



دکتر عین‌اله پاشا

معرفی کتاب درسی آمار و مدل‌سازی و اهمیت آن در ریاضیات دبیرستانی



دکتر عین‌اله پاشا متولد ۱۳۲۸ شهرستان کرج بوده و در سال ۱۳۴۶ از دبیرستان فارابی همین شهر فارغ‌التحصیل و بلافاصله وارد دانشگاه تهران شده و در سال ۱۳۵۰ از دانشکده ریاضی این دانشگاه مدرک لیسانس خود را دریافت نمود. وی برای تکمیل تحصیلات خود به کشور امریکا اعزام شده و در سال ۱۳۶۲ موفق به اخذ مدرک دکترای آمار از دانشگاه ایالتی میشیگان گردید. نامبرده پس از مراجعت به ایران تا کنون ده‌ها سمت علمی و فرهنگی داشته است که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم (۷۵-۵۲)، عضو انجمن ریاضی ایران، رئیس مؤسسه ریاضیات دانشگاه تربیت معلم، مدیر گروه آمار دانشگاه تربیت مدرس، عضو کمیته برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش، عضو و مؤسس انجمن آمار ایران، مدیر گروه آمار دانشگاه پیام نور، مدیر کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه تربیت معلم، رئیس مرکز مطالعات، تحقیقات و ارزشیابی سازمان سنجش آموزش کشور و...

نامبرده همچنین تا کنون در ده‌ها سمینار ملی و بین‌المللی در زمینه آمار و ریاضی با ارائه مقاله شرکت نموده‌اند و نیز دارای بیش از ۲۰ جلد تألیف و ترجمه کتاب می‌باشد و تا کنون علاوه بر عضویت در هیأت تحریریه چندین مجله تخصصی ریاضی و آمار، ده‌ها مقاله نیز در مجلات داخلی و خارجی به چاپ رسانده‌اند.

چکیده:

در این مقاله پس از دو مقدمه، یکی درباره استدلال و دیگری درباره شناخت، به معرفی اجمالی آمار و احتمال می‌پردازیم. به ضرورت مطالعه و آگاهی یافتن در این علم نیز اشاره شده است.

واژگان کلیدی: استقراء، قیاس، آمار و احتمال ، خطا

مقدمه اول:

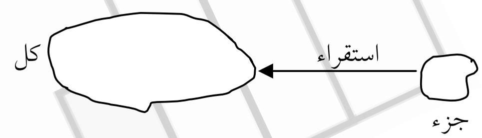
ارسطو آمد و گفت در حرف‌ها و اظهار نظرهایتان باید دلیل و برهان اقامه کنید. آوردن دلیل نیز باید چهارچوب و اصولی داشته باشد. نمی‌توان هر حرفی را زد و انتظار داشت که مورد قبول واقع شود و یا از چند مطلب نتیجه‌ای بگیریم که فقط مورد پسند خودمان باشد. نتیجه گیری‌ها باید طوری باشد که در هر زمانی و نیز با هر عقل سلیمی پذیرفتنی باشد. این گونه است که علم ساخته می‌شود و

توسعه می‌یابد. از ارسطو پرسیدند این چهارچوب کدام است و آن اصول کدامند؟ ارسطو ***دستگاه منطقی*** خود را ارائه کرد. در این دستگاه ضمن معرفی مفاهیم اولیه، از جمله جزء و کل، دو اصل بسیار مهم استقراء و قیاس نیز معرفی شدند.

مفاهیم جزء و کل را به همان معنای معمولی و عادی که در محاوره روزمره از آن استفاده می‌کنیم به کار می‌بریم و توضیح بیشتری درباره آن نمی دهیم، ولی سعی می‌کنیم قدری درباره استقراء و قیاس صحبت کنیم.

استقراء

به بیان ساده استقراء یعنی تعمیم خاصیتی از جزء به کل شکل زیر این مفهوم را بهتر می‌رساند



البته این تعمیم باید در همان چهارچوب و اصول ارائه شده به وسیله ارسطو باشد. اگر بتوانیم خاصیتی را که جزء دارد به طور اصولی به کل تعمیم دهیم، می‌گوییم استقراء کرده‌ایم و یا از استقراء استفاده شده است. ما از مثال‌های فلسفی که در این زمینه مطرح می‌شود در می‌گذریم، سراغ مثال‌های ساده و آشنا در ریاضیات می‌رویم. می‌دانیم که هر عدد طبیعی مانند n در برابری زیر صدق می‌کند:

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

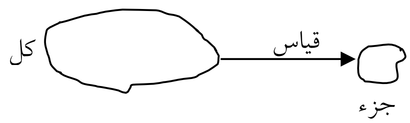
برای اثبات این برابری نمی‌توانیم تک‌تک اعضا کل را که در این جا مجموعه اعداد طبیعی است، امتحان کنیم. البته ممکن است برای جزئی از این کل بتوانیم درستی برابری بالا را تصدیق کنیم. این جزء را هم هر چقدر بخواهیم می‌توانیم بزرگ انتخاب کنیم ولی با روش امتحان کردن این خاصیت به تمام کل تعمیم داده نمی‌شود. در این جا شکل ریاضی اصل استقراء به کمک ما می‌آید. این اصل می‌گوید اگر توانستید ثابت کنید که $n=۱$ این خاصیت را دارد و اگر توانستید ثابت کنید که اگر عددی این خاصیت را داشته باشد تالی بلافصل(*) آن نیز این خاصیت را دارد آنگاه تمام اعداد طبیعی نیز این خاصیت را دارند. حال با استفاده از این اصل اثبات برابری بالا به ازای هر عدد طبیعی n آسان[۱] است. (به زیرنویس انتهای مقاله مراجعه شود)

تمرین: با آزمون چند مقدار برای n، مقدار طرف دوم عبارت جبری زیر را حدس بزنید و بعد حدس خود را ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}$$

قیاس

به بیان ساده قیاس یعنی تخصیص خاصیتی از کل به جزء. در واقع عکس جریان استقراء در اینجا رخ می‌دهد. شکل زیر می‌تواند قیاس را مجسم کند.



---

*برای عدد طبیعی n ، عدد $n+۱$ را تالی (بلافصل) آن می‌نامیم.

باز هم وارد مباحث فلسفی قیاس نمی‌شویم به ذکر مثال ساده‌ای اکتفا می‌کنیم. می‌دانیم هر مثلث قائم الزاویه‌ای دارای این خاصیت است که مربع وتر آن برابر مجموع مربعات اضلاع آن است در اینجا «کل» عبارت است از مجموعه تمام مثلث‌های قائم الزاویه و خاصیتی که رابطه بین وتر و اضلاع را برقرار می‌کند خاصیتی است که در کل برقرار است. حال اگر بخواهیم وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع ۲ و ۳ را بیابیم، می‌گوییم این مثلث جزیی از این کل است، پس باید داشته باشیم:

$$(\text{وتر})^{۲} = ۴ + ۹ = ۱۳$$

و لذا طول وتر آن $\sqrt{۱۳}$ است. هر جایی که قضیه‌ای را به کار می‌بریم در واقع از قیاس استفاده می‌کنیم.

مقدمه دوم:

این مقدمه درباره «شناخت» است. به نظر می‌رسد که یکی از غرائز انسان میل او به شناختن باشد. می‌خواهد هر آنچه که پیرامون خود می‌بیند و یا آثار آن را حس می‌کند بشناسد و پی به علت وجودی و نحوه عملکرد آن ببرد. البته وقتی که چیزی را شناخت و راجع به آن علم پیدا کرد، مایل است به دیگران نیز بشناساند. درباره شناخت نیز فلاسفه پیشقدم شده‌اند و بحث‌های مفصل کرده‌اند. تقسیمات متعددی از شناخت و سطوح آن ارائه کرده‌اند. ما به این وارسی نزدیک نخواهیم شد ولی سعی می‌کنیم قدری این مقوله را بشناسیم. شناخت هر شیئی از دیدگاه‌ها و مکاتب و حتی از نظر افراد مختلف ممکن است متفاوت باشد. اگر راجع به دانش‌آموزی در کلاس بخواهیم شناخت پیدا کنیم بسته به منبع اطلاعاتی ما، مطالب متفاوت به دست خواهیم آورد. مسلماً همکلاسی، معلم، ناظم مدرسه، روانشناس طرف مشورت با مدرسه و پزشک مدرسه درباره این دانش آموز یکسان اظهار نظر نخواهند کرد. همکلاسی درباره دوستی‌ها و معلم درباره انجام تکالیف و دقت و نظم اوو ناظم مدرسه درباره رعایت حقوق دیگران، روانشناس درباره حالات روانی و پزشک درباره وضعیت جسمانی او صحبت خواهند کرد. بنابراین شناخت ممکن است مطلق نباشد و بستگی به هدفی داشته باشد که در پیش رو داریم. البته هستند بسیار کسانی که درباره این دانش آموز اصلاً شناختی ندارند زیرا این دانش آموز در افق دید و حیطه مورد مطالعه آنها نبوده است.

این شناخت‌ها همگی مبتنی بر اطلاعاتی است که از موضوع مورد مطالعه حاصل شده است و همانطوری که گفتیم این شناخت هیچگاه کامل نیست. البته هر چقدر اطلاعات کامل‌تر و دقیق‌تر باشند، شناخت نیز کامل‌تر خواهد بود. ما بحث را به این صورت کلی ادامه نمی‌دهیم و با مثالی از ریاضی آن را پی می‌گیریم. فرض کنید تابعی دارید که به نحوی می‌دانید در نقطه x_0 مقدار آن برابر y_0 است. می‌خواهید این تابع را معلوم کنید. مسلماً بی‌شمار تابع با این خاصیت در اختیار داریم و مسلماً منظور شما چنین مجموعه وسیعی نیست، بلکه تابع شما یک تابع بیشتر نیست. برای آنکه بتوانیم به طریقی به تابع شما

نزدیک‌تر شویم اطلاعات بیشتری لازم است در اختیار بگذارید. ممکن است بگویید تابع من یک چند جمله‌ای از درجه دوم است که در دو نقطه به طول‌های ۰ و ۱ محور x ها را قطع می‌کند و در نقطه ۲ برابر ۵ است. این اطلاعات تابع شما را به صورت یکتای $y = ۲/۵x^{۲} - ۲/۵x$ روشن می‌کند. ولی در بسیاری مواقع دسترسی به این اطلاعات دقیق میسر نیست و لذا مشخص کردن هدف نیز به طور کامل ممکن نخواهد بود. از این نکته که بگذریم در بسیاری مواقع اطلاعات به صورت یقینی آن طور که در این مثال گفته شد در اختیار نیست بلکه به عواملی که ما آنها را پدیده‌های تصادفی می‌نامیم بستگی دارند و در نتیجه مشکلی بر مشکلات ما افزوده می‌شود.

تمرین ۱. مجموعه توابعی را تعیین کنید که نمودار آنها در نقاط $x_{۱۰} = ۱۰, \cdots, x_{۲} = ۱, x_{۱} = ۰$ محور x ها را قطع می‌کند.

۲. راستش را بخواهید می‌خواستم بنویسم صورت کلی توابعی را بنویسد که فقط در نقاط $x_{۱۰} = ۱۰, \cdots, x_{۱} = ۰$ برابر با صفر شوند که بعد به صورت کلی چند جمله‌ای‌ها قناعت کردم ولی باز هم منصرف شدم. نظر شما چیست؟

> در کتاب آمار و مدلسازی جمله‌ای هست که تا حدود زیادی رسالت این علم را مشخص می‌کند. در آن کتاب گفته شده است که اگر اظهار نظری با کمیت همراه نباشد، ارزش چندانی ندارد.

ما دو مقدمه نسبتاً طولانی را پشت سر گذاشتیم. اینک به موضوع اصلی که آمار و احتمال است می‌پردازیم. یکی از علومی که می‌تواند مؤثر باشد، آمار و احتمال است. این علم این قدرت را دارد که بتواند از اطلاعات ناقص، شناخت قابل توجهی (در مقایسه با اطلاعاتی که در اختیار داریم) به ما بدهد. در کتاب آمار و مدلسازی جمله‌ای هست که تا حدود زیادی رسالت این علم را مشخص می‌کند.در آن کتاب گفته شده است که اگر اظهار نظری با کمیت همراه نباشد، ارزش چندانی ندارد.لذا می‌بایستی به نحوی بتوانیم شناخت را کمّی کنیم. میزان اعتبار این شناخت بستگی به میزان نزدیکی ما به آنچه که در پی آن هستیم دارد. علم آمار و احتمال این میزان را که بیشتر در قالب خطا، میزان خطا، رفتار خطا و یا مدل‌های مربوط به خطاست، بررسی می‌کند. در فصل اول کتاب آمار و مدل‌سازی سعی شده است که بگوییم اندازه‌گیری‌ها آن چیزی که باید باشند نیستند و در آنها خطاهای پنهان و آشکار وجود دارد. مهار کردن خطاهای آشکار و آشکار کردن چند و چون خطاهای پنهان از هنرهای والای این علم است. ما برای رسیدن به این مراحل در بعضی مواقع از اطلاعاتی که از نمونه حاصل شده است استفاده می‌کنیم. در واقع می‌خواهیم جامعه را به کمک این اطلاعات شناسایی کنیم، ملاحظه می‌کنید در اینجا با داشتن اطلاعاتی از نمونه که جزیی از جامعه است می‌خواهیم جامعه (یا همان کل) را بشناسیم. بنابر آنچه که در مقدمه اول گفتیم داریم از روش استقراء استفاده می‌کنیم. این بخش از علم آمار و احتمال را که مبتنی بر استقراء است **آمار** می‌گویند.

بنابراین آمار بخش استقرایی استنتاج‌های ما را تشکیل می‌دهد. برای آنکه بتوانیم از رفتار نمونه به رفتار جامعه برسیم در اکثر مواقع لازم است مسأله را حل شده فرض کنیم و بگوییم اگر جامعه چنین باشد، نمونه باید این ویژگی‌ها را داشته باشد و ویژگی‌های کل را به جز

تخصیص می‌دهیم، یعنی به قیاس متوسل می‌شویم. این بخش از علم آمار و احتمال را که از قیاس استفاده می‌کند **احتمال** می‌گویند. پس از هندسه، احتمال یکی از کامل‌ترین علوم قیاسی است.

البته برای توجیه علم آمار و احتمال نیازی به این همه مقدمه و توسل به فلسفه نبود. اگر ما در کارهای خود بیشتر دقت کنیم ملاحظه می‌کنیم اکثر تصمیم‌ها و اقدامات ما مبتنی بر قیاس و استقراء یعنی احتمال و آمار است. البته در برنامه‌ریزی‌های کلان مملکتی و در تحقیقات گسترده‌ای که هر روز در زمینه‌های علمی از ادبیات گرفته تا پزشکی، از روانشناسی گرفته تا مهندسی، در اقتصاد و سایر مباحث، آمار و احتمال رکن اساسی است. این ویژگی آمار و احتمال سبب شده تا هر چه زودتر شهروندان با مبانی این علم آشنا شوند. از این رو درس آمار و مدلسازی در برنامه‌های دبیرستانی گنجانده شد. آنچه که در این کتاب آمده است صرفاً برای یاد گرفتن نیست بلکه برای به کار بردن نیز هست. برای آنکه بتوانیم از مباحث این درس استفاده کنیم پروژه‌هایی در برنامه تعبیه شده است. پرداختن به این پروژه‌ها توان لازم را در خواننده ایجاد کرده و او را برای اقدامات بعدی و کارهای تحقیقاتی بیشتر آماده می‌سازد. مطالب درسی این کتاب را شاید بتوان در طول ۲ هفته آموزش داد ولی این آموزش آمادگیهای لازم را که هدف کتاب است ایجاد نمی‌کند.

(۱) داستان معروفی درباره این مسأله ذکر کرده‌اند که بیان آن خالی از لطف نیست. می‌گویند روزی معلم دبستانی به دانش‌آموزان خود گفت مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را بیابند. انتظار بر این بود که دانش‌آموزان اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را بنویسند و سپس آنها را جمع کنند که این کار وقت زیادی می‌گرفت. اما زمان زیادی نگذشته بود که دانش‌آموزی جواب صحیح را اعلام کرد. نام این دانش‌آموز ***گاوس*** و راه حل وی به صورت زیر بود:

$$\begin{array}{l} ۱+۲+\cdots+۱۰۰=S \\ ۱۰۰+۹۹+\cdots+۱=S \\ \hline ۲S=۱۰۱+۱۰۱+\cdots+۱۰۱=۱۰۰\times۱۰۱ \end{array}$$

پس مقدار مورد نظر نصف این مقدار یعنی $S = ۵۰۵۰$ است (عجب نبوغی، بی‌دلیل نیست که هنوز هم که هنوز است کسی نتوانسته در ریاضیات نام گاوس را تحت‌الشعاع قرار دهد.)

حال به اثبات استقرایی این گزاره می‌پردازیم:

چنان که گفتیم، به ازای $n = ۱$ باید درستی حکم اثبات شود، که بدیهی است: $۱=\frac{۱\times۲}{۲}$ حال فرض کنیم به ازای $n=k$ این حکم درست باشد، یعنی:

$$۱+۲+۳+\cdots+k=\frac{k(k+۱)}{۲}$$

باید نشان دهیم به ازای $n=k+۱$ نیز این حکم درست است یعنی:

$$۱+۲+۳+\cdots+k+(k+۱)=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

برای این منظور، کافی است به طرفین فرض $(n=k)$ ، $k+۱$ را اضافه کنیم:

$$۱+۲+۳+\cdots+k+(k+۱)=\frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)=$$

$$\frac{k(k+۱)+۲(k+۱)}{۲}=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

و اثبات تمام است. برای آشنایی بیشتر با قضیه استقراء ریاضی به کتاب‌های مربوط به آن مراجعه شود.